



UNIVERSIDADE
DE VIGO

ANÁLISIS TRANSITORIO

Manuel Pérez Donsión

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Universidad de Vigo

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer y Segundo Orden

Introducción

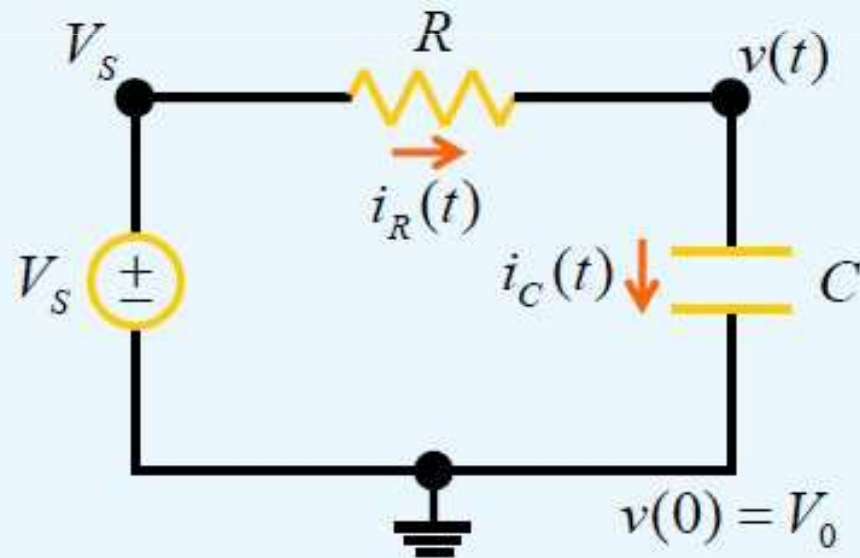
Circuitos RC sin fuentes

Circuitos RC con fuentes

Circuitos RL

Circuitos RLC sin fuentes

Circuitos RLC con fuentes



ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer y Segundo Orden

INTRODUCCIÓN

- En este tema se consideran circuitos que contienen diversas combinaciones de dos o tres elementos pasivos (R, L, C)
- En la primera parte del tema se examinan dos tipos de circuitos simples:
 - 1) el circuito con una resistencia y un condensador (circuito RC)
 - 2) el circuito con una resistencia y una bobina (circuito RL)
- Los circuitos RC y RL se analizarán aplicando las leyes de Kirchhoff.
- El análisis de circuitos resistivos da como resultado ecs. algebraicas. Sin embargo, los circuitos RC y RL producen ecs. diferenciales.
- Las ecs. diferenciales resultantes del análisis de circuitos RC y RL son de primer orden. Por ello, se les denomina Circuitos de Primer Orden
- Estudiaremos tanto circuitos con fuentes independientes como circuitos sin fuentes independientes.
- Cuando no hay fuentes independientes, las tensiones y corrientes en el circuito se deben a las condiciones iniciales en el condensador o en la bobina (a la energía inicialmente almacenada en ellos).

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer y Segundo Orden

INTRODUCCIÓN

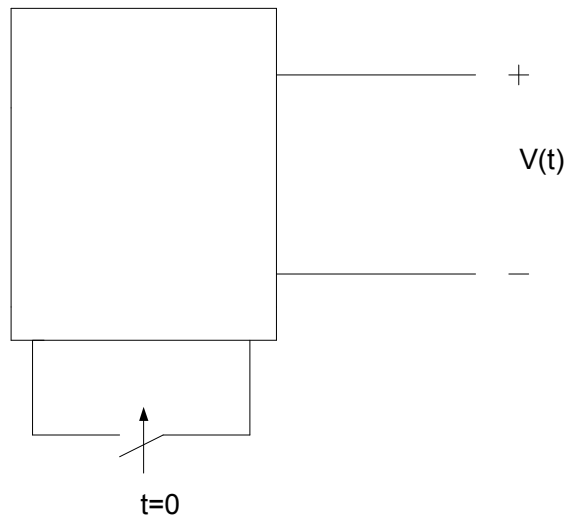
- En la segunda parte del tema se estudiarán circuitos que tienen dos elementos de almacenamiento.
- A estos circuitos se les conoce como Circuitos de Segundo Orden porque se describen mediante ecs. diferenciales que contienen derivadas segundas
- En concreto, estudiaremos la respuesta de circuitos RLC, tanto con fuente independiente como sin ella.

Una buena parte de la presente presentación se ha entresacado de los apuntes sobre “Análisis de transitorios de circuitos de primer y segundo orden” de José A. Pereda de la Universidad de Cantabria y ,otra parte , de “Análisis de transitorios de circuitos de 1º y 2º orden”, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Sevilla.

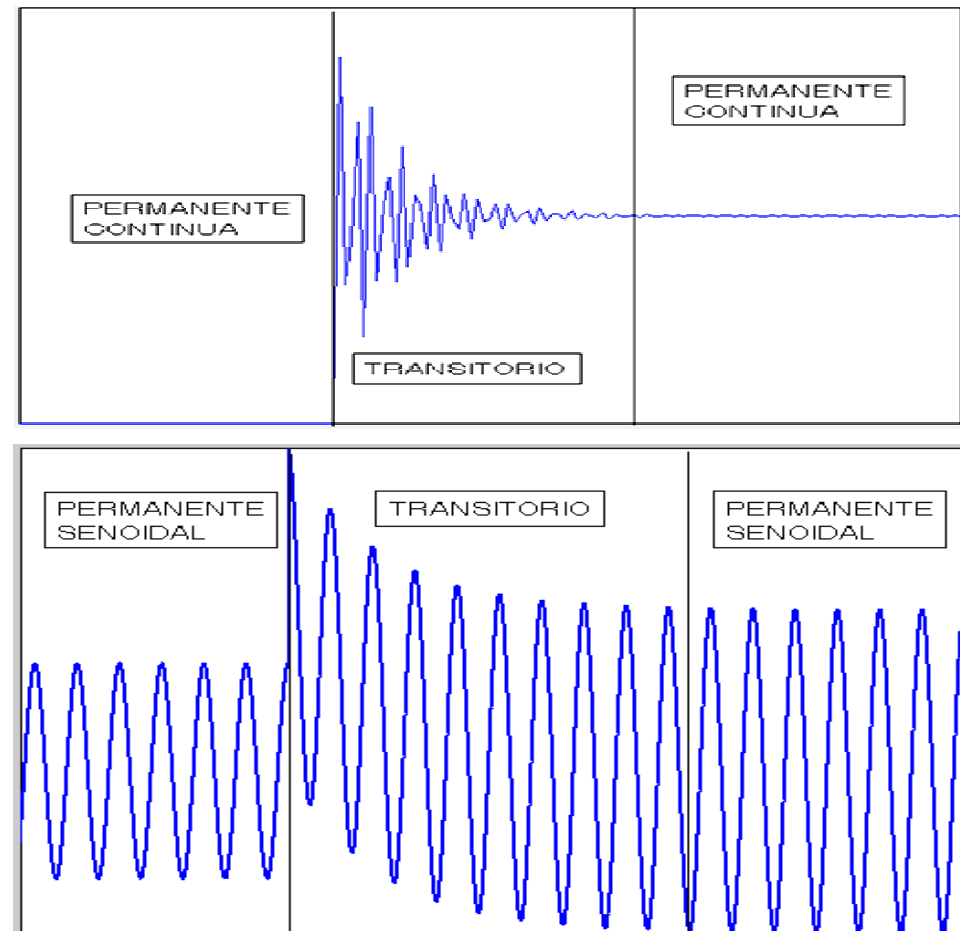
ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer y Segundo Orden

Transitorio: Evolución debida a cambios topológicos en el circuito. Transición entre un régimen permanente y otro, tras un cambio en las condiciones del estado del circuito.



Los transitorios son debidos a elementos que almacenan energía: Bobinas y condensadores.

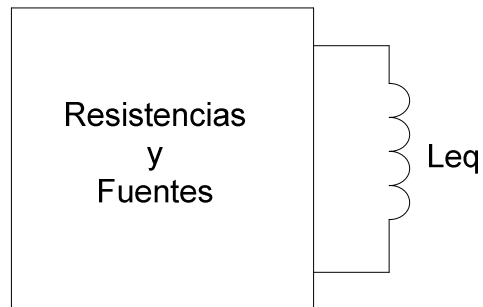
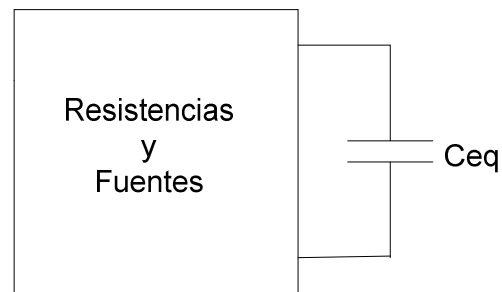


ANÁLISIS TRANSITORIO

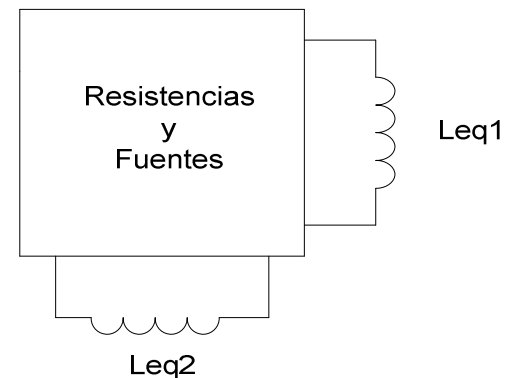
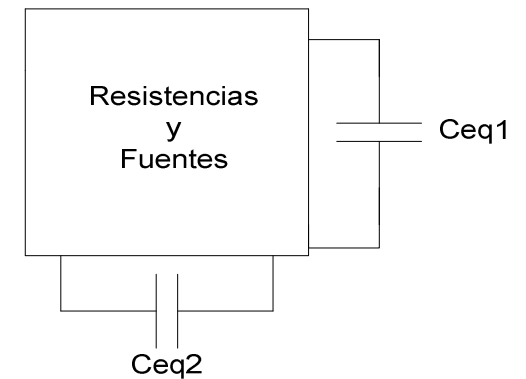
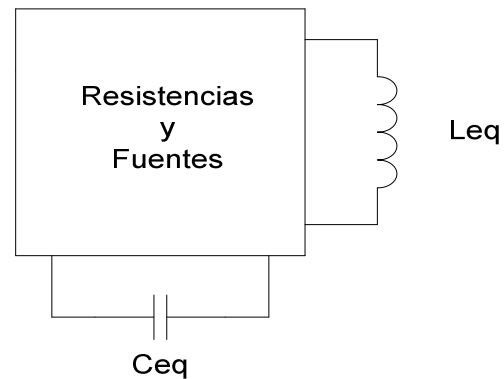
Análisis Transitorio de Circuitos de Primer y Segundo Orden

INTRODUCCIÓN

Circuitos de primer orden



Circuitos de segundo orden

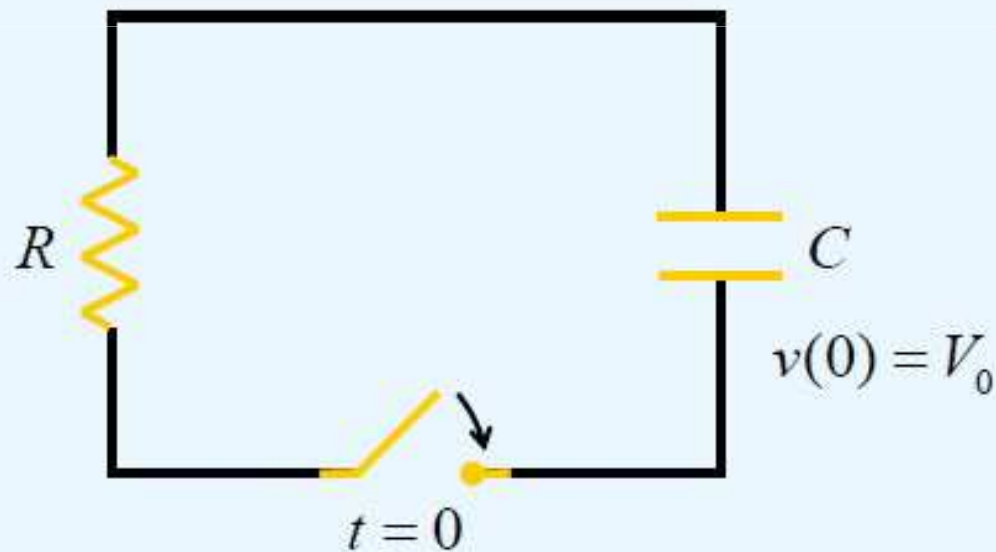


ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC sin fuentes

- Descarga de un condensador a través de una resistencia:
- Consideramos un condensador C inicialmente cargado $v(0) = V_0$
- Conectamos el condensador a una resistencia R a través de un interruptor como se muestra en la figura (circuito RC sin fuentes)



- En el instante inicial $t = 0$ se cierra el interruptor y el condensador comienza a descargarse

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC sin fuentes

- Para estudiar el proceso de descarga resolveremos la KCL en el nudo

$$i_R(t) + i_C(t) = 0$$

- Según la relación i-v de cada elemento:

$$i_R = \frac{v}{R}$$

$$i_C = C \frac{dv}{dt}$$

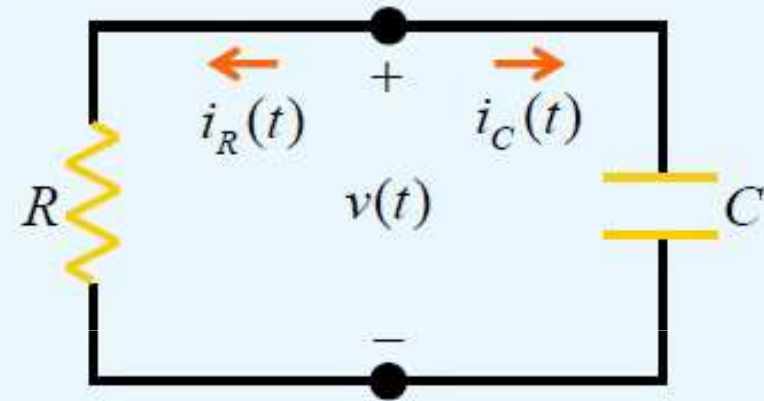
- Sustituyendo en la KCL:

$$\frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} dt$$

- Integrando:

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} \int dt \Rightarrow \ln v = -\frac{1}{RC} t + \ln A \Rightarrow v = A \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right)$$

siendo $\ln A = \text{cte}$



$$v(0) = V_0$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC sin fuentes

- Aplicando las condiciones iniciales

$$v(0) = V_0$$

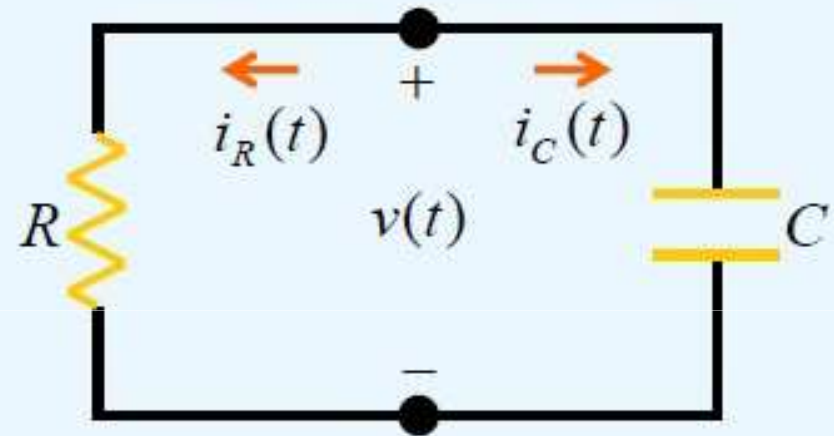
resulta

$$V_0 = A \exp\left(-\frac{1}{RC} 0\right) = A$$

- Luego, la solución buscada es:

$$v(t) = V_0 \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right)$$

- Esta solución indica que la tensión del circuito RC cae exponencialmente desde el valor inicial hasta cero



$$v(0) = V_0$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC sin fuentes

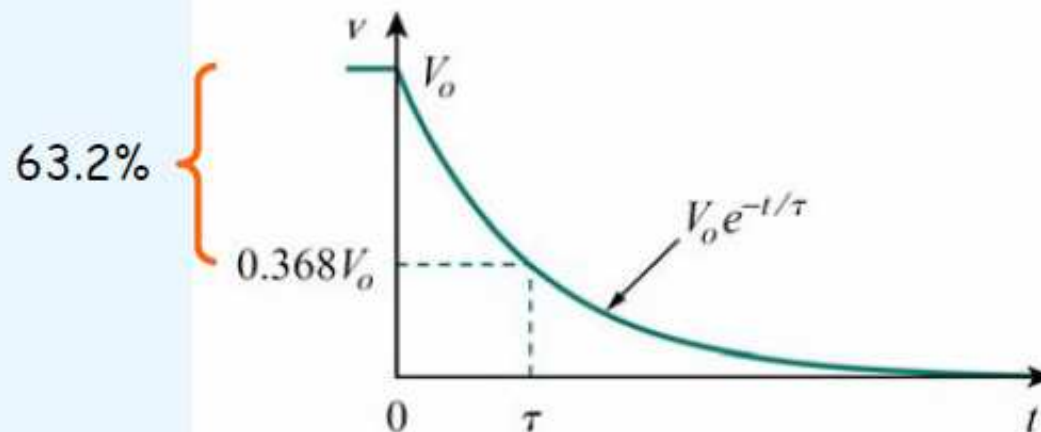
- La solución anterior suele escribirse como

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = RC$$

siendo τ una constante con unidades de tiempo denominada tiempo de relajación o constante de tiempo del circuito

" La constante de tiempo de un circuito RC es el tiempo necesario para que la tensión disminuya en un factor $1/e$ (un 63.21% de su valor inicial) "

$$t = \tau \Rightarrow v(\tau) = V_0/e \approx 0.3679 V_0$$

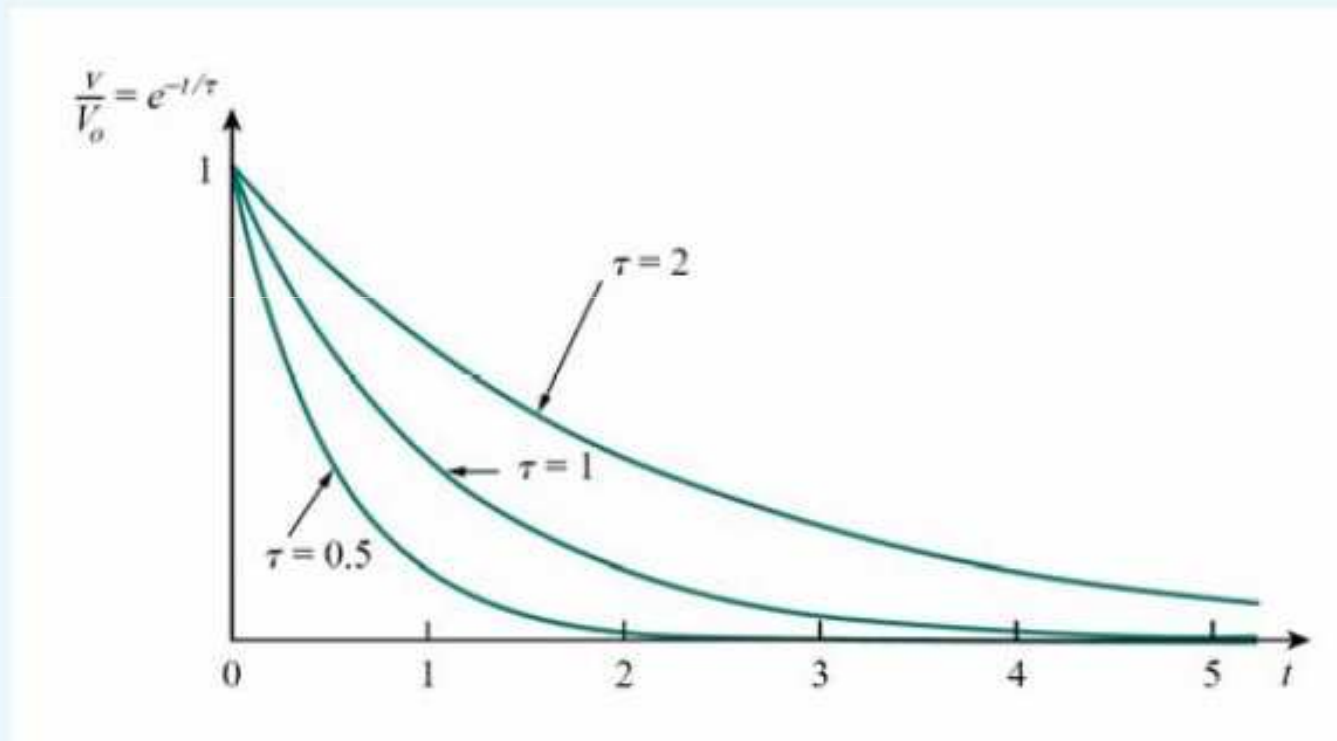


ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC sin fuentes

- El tiempo τ da una idea de la rapidez de descarga del circuito.



- Cuanto más pequeño es τ más rápida es la descarga
- Después de un tiempo $t = 5\tau$ la tensión ha llegado al 99% de su valor final $\rightarrow$ el tiempo efectivo de un transitorio es 5τ

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC sin fuentes

- Cálculo de la corriente:

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

- Potencia disipada en R:

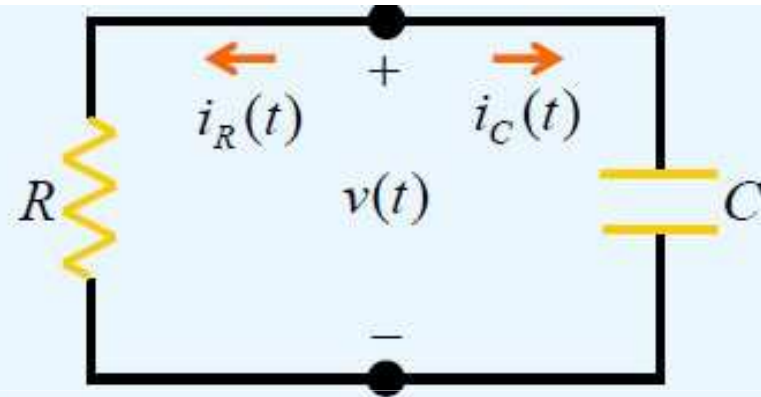
$$p(t) = vi_R = \left(V_0 e^{-t/\tau}\right) \left(\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}\right) = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau}$$

- Energía disipada hasta un instante t :

$$w_R(t) = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = -\frac{\tau}{2} \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} C V_0^2 (1 - e^{-2t/\tau})$$

- Para $t \rightarrow \infty$: $w_R(\infty) = \frac{1}{2} C V_0^2$

- La energía total disipada en R es igual a la energía almacenada en el condensador en el instante inicial $t = 0$.



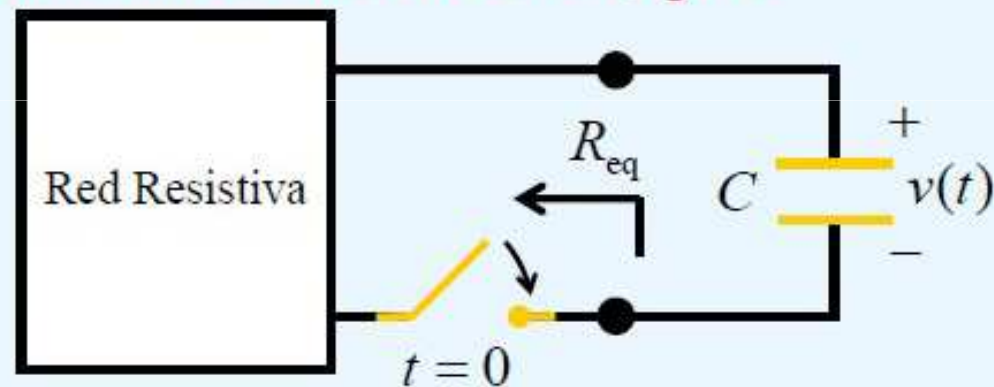
ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC sin fuentes

- Descarga de un condensador a través de una red resistiva:

- Consideramos un condensador C inicialmente cargado $v(0) = V_0$
- Conectamos el condensador a una red resistiva a través de un interruptor como se muestra en la figura



- Para obtener $v(t)$ ($t > 0$) basta calcular R_{eq} vista desde los terminales del condensador y aplicar la solución conocida para el circuito RC:

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = R_{eq} C$$

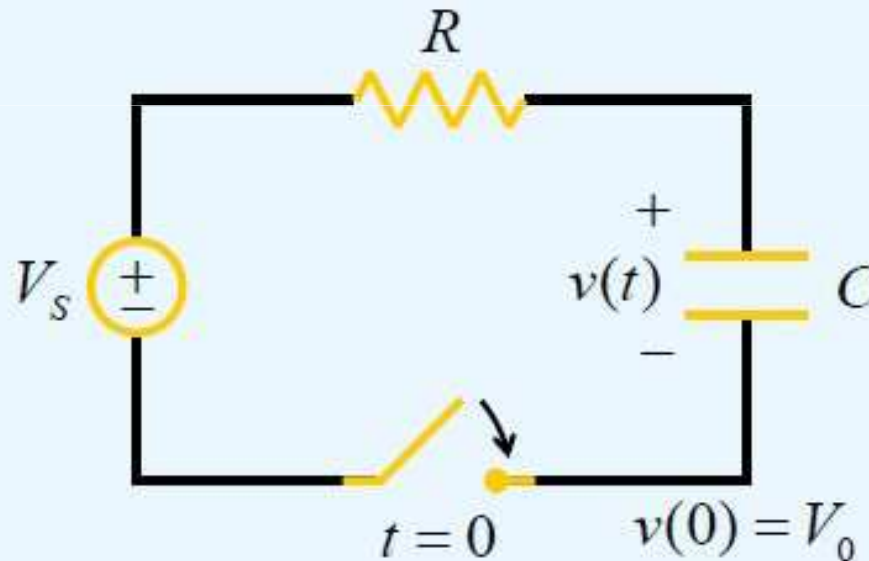
- Nota: si el interruptor cambia en $t = t_0 \rightarrow v(t) = V_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC con fuentes

- Consideramos un condensador C inicialmente cargado $v(0) = V_0$
- Conectamos el condensador a una fuente de continua V_s . También se incluye una resistencia R y un interruptor.



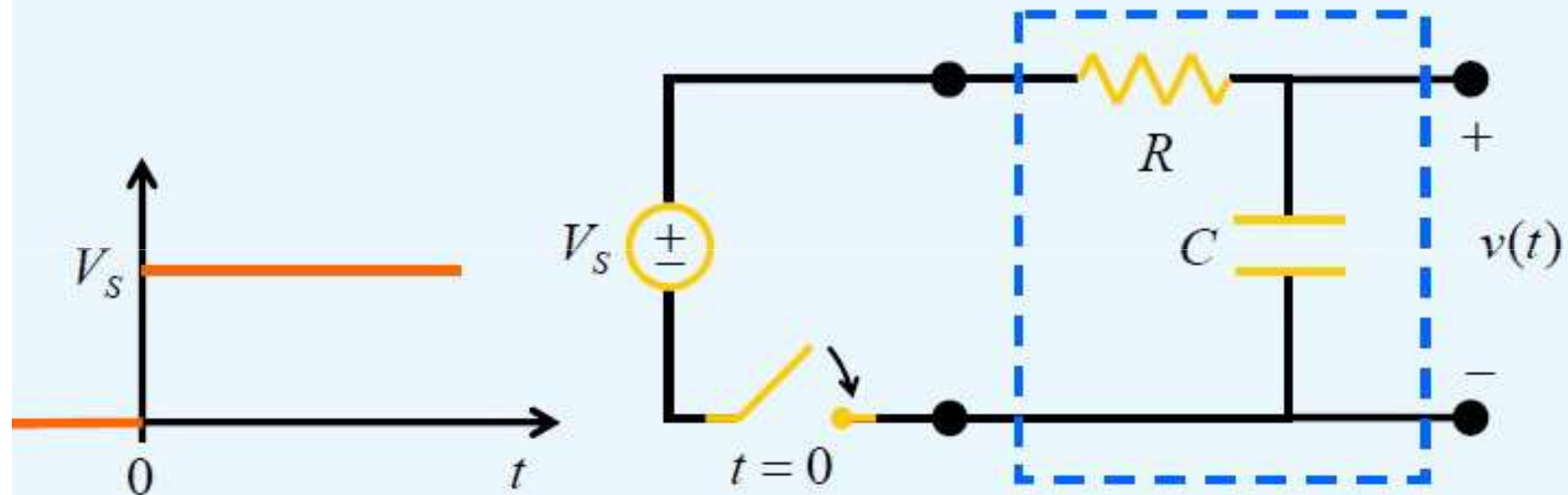
- En el instante inicial, $t = 0$, se cierra el interruptor y el condensador comienza a cargarse

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC con fuentes

- Podemos redibujar el circuito de la siguiente forma:



- La fuente V_s representa la excitación o entrada al circuito RC
- La tensión en el condensador $v(t)$ puede interpretarse como la respuesta o salida
- Cuando V_s es cte, al tipo de entrada del dibujo se le llama ESCALÓN, ya que cambia bruscamente de 0 a V_s

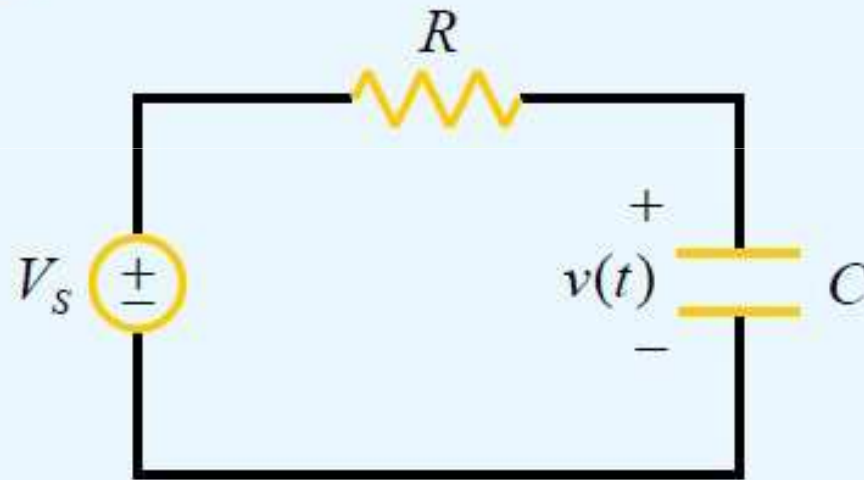
ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC con fuentes

- Resolución del circuito:

- En $t = 0$ se cierra el interruptor, luego para $t \geq 0$ el circuito resultante es:



- La tensión en el condensador es continua, luego

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0$$

- Para resolver el circuito emplearemos análisis de nudos

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC con fuentes

- Tenemos 2 nudos más el de referencia

- Aplicamos la KCL al nudo $v(t)$:

$$i_R(t) = i_C(t)$$

- Según las relaciones i-v:

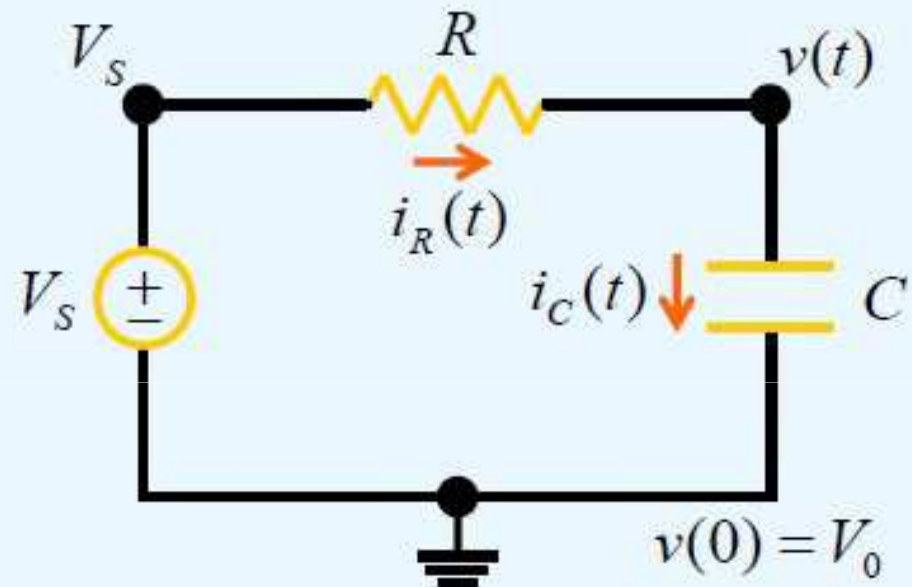
$$i_R = \frac{V_S - v}{R} \quad i_C = C \frac{dv}{dt}$$

- Sustituyendo en la KCL:

$$\frac{V_S - v}{R} = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v - V_S} = -\frac{1}{RC} dt$$

- Integrando:

$$\int_{V_0}^{v(t)} \frac{dv}{v - V_S} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \Rightarrow \ln(v - V_S) \Big|_{V_0}^{v(t)} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^t$$



ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC con fuentes

- Sustituyendo en los límites

$$\ln\left(\frac{v(t) - V_s}{V_0 - V_s}\right) = -\frac{t}{RC}$$

de donde

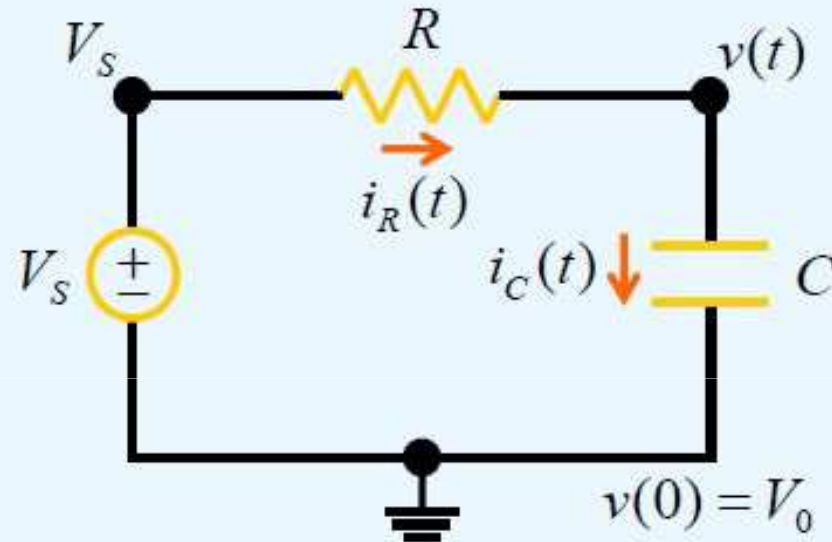
$$v(t) = V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}$$

con $\tau = RC$

- La solución final del problema es:

$$v(t) = \begin{cases} V_0, & \text{para } t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}, & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\tau = RC$$

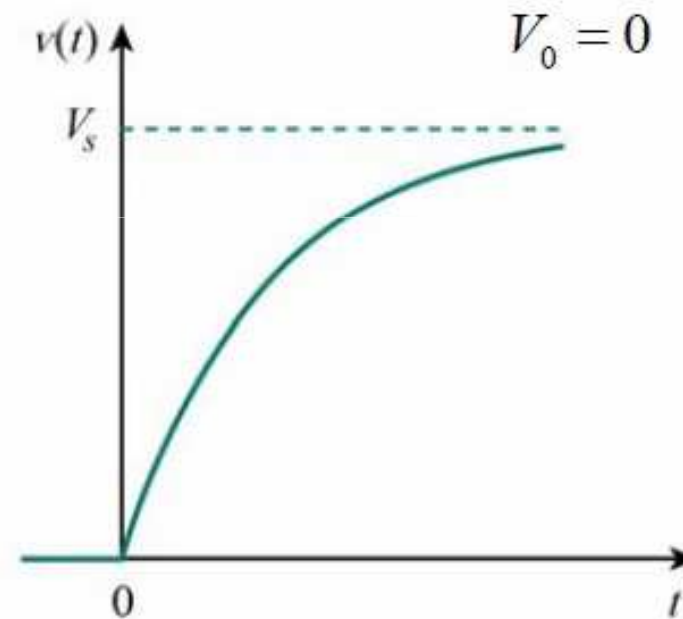
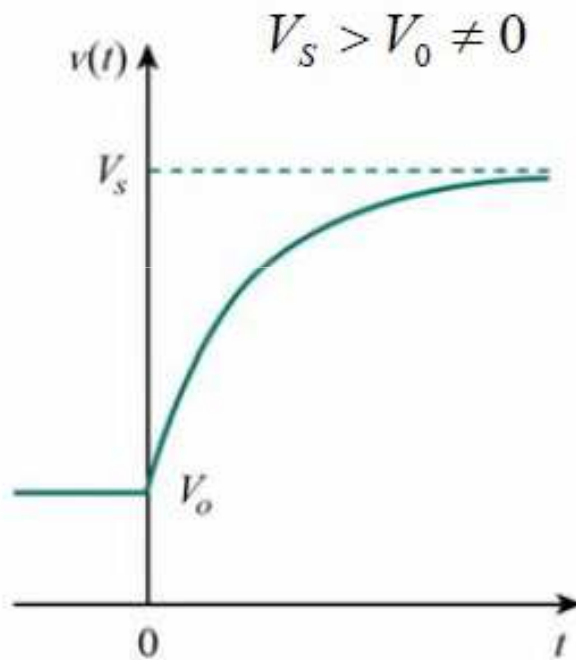


ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC con fuentes

- Representación gráfica de la solución



$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-t/\tau}$$

- La tensión en el condensador tiende al valor de la tensión de la fuente (la salida sigue a la entrada)

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC con fuentes

- Respuesta transitoria y respuesta en estado estable

- La **respuesta completa** de un circuito, v , puede dividirse en dos contribuciones:
 - 1) la **respuesta transitoria**, v_t
 - 2) la **respuesta en estado estable**, v_{ss}

- Matemáticamente:

$$v = v_t + v_{ss}$$

- Para el circuito RC:

$$v(t) = V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau} \quad (\text{respuesta completa})$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC con fuentes

$$v(t) = V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau} \quad (\text{respuesta completa})$$

"La **respuesta transitoria** de un circuito es la parte de la **respuesta completa** que se anula con el tiempo (se hace cero cuanto $t \rightarrow \infty$)"

- Para el circuito RC: $v_t = (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}$ (respuesta transitoria)

"La **respuesta en estado estable** de un circuito es la parte de la **respuesta completa** que permanece mucho tiempo después de aplicada la excitación (la parte que queda cuando $t \rightarrow \infty$)"

- Para el circuito RC: $v_{ss} = V_s$ (respuesta en estado estable)

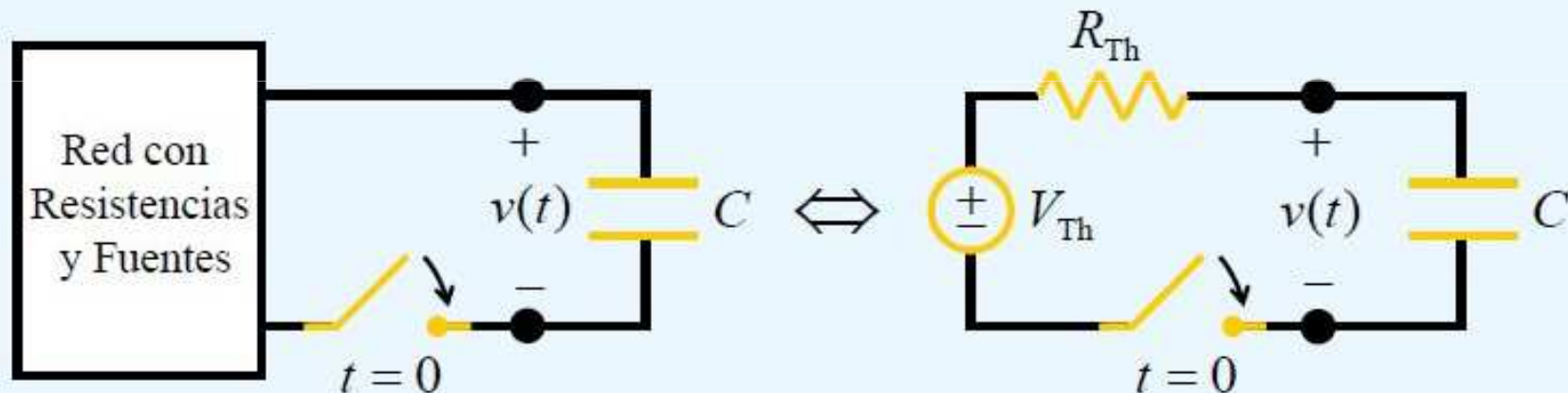
- Nótese que, cuando la fuente tiene valor cte, la respuesta en estado estable es la misma que la repuesta de continua!!!

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RC con fuentes

- Carga de un condensador a través de una red de resistencias y fuentes:
- Consideramos un condensador C inicialmente cargado $v(0) = V_0$
- Conectamos el condensador a una red de resistencias y fuentes de valor cte a través de un interruptor, como se muestra en la figura



- Para obtener la tensión en el condensador $v(t)$ (para $t > 0$) basta calcular el equivalente Thevenin visto desde los terminales del condensador y aplicar la solución conocida para el circuito RC:

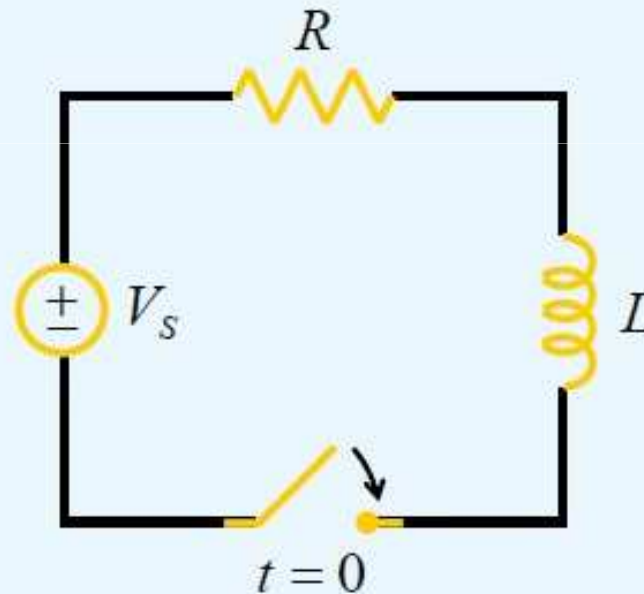
$$v(t) = V_{Th} + (V_0 - V_{Th})e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = R_{Th}C \quad t \geq 0$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RL

- Consideramos una bobina L con una corriente inicial $i(0) = I_0$
- Conectamos la bobina a una fuente de valor cte V_s . También se incluye una resistencia R y un interruptor.



- En el instante inicial, $t = 0$, se cierra el interruptor y comienza a circular corriente

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RL

- Resolvemos para $t \geq 0$

- Aplicamos análisis de mallas

$$-V_S + v_R + v_L = 0$$

- Según las relaciones v-i:

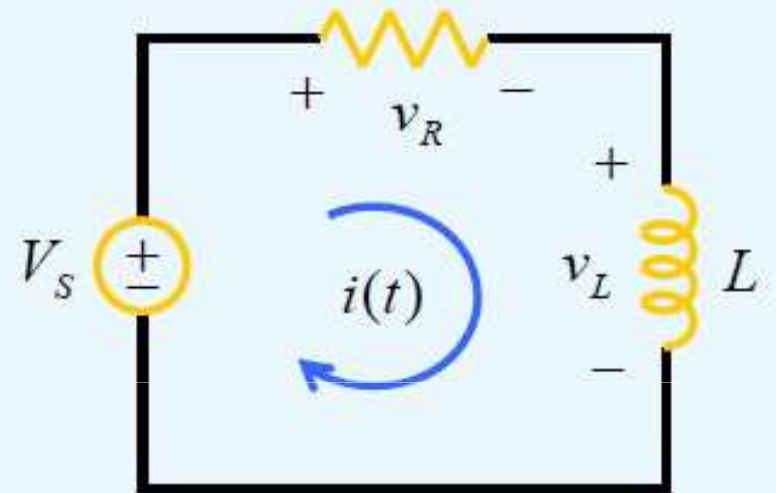
$$v_R = Ri \qquad v_L = L \frac{di}{dt}$$

- Sustituyendo en la KCL:

$$-V_S + Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{i - V_S / R} = -\frac{L}{R} dt$$

- Integrando:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i - V_S / R} = -\frac{L}{R} \int_0^t dt \Rightarrow \ln(i - V_S / R) \Big|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{L}{R} t \Big|_0^t$$



$$i(0) = I_0$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RL

- Sustituyendo en los límites

$$\ln\left(\frac{i(t) - V_s / R}{I_0 - V_s / R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

de donde

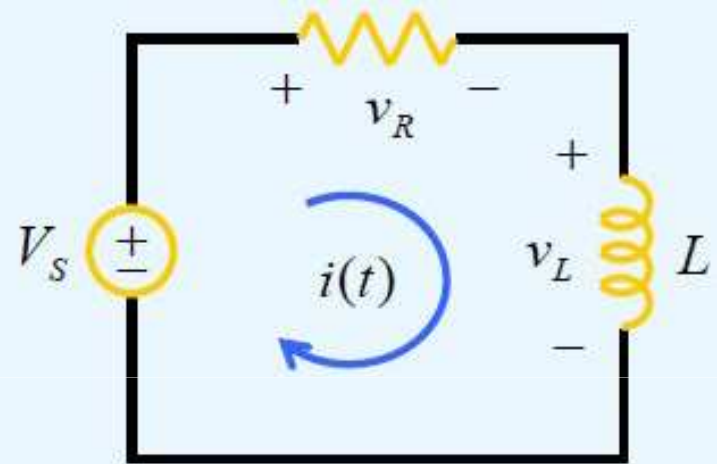
$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-t/\tau}$$

con $\tau = R / L$

- La solución final del problema es:

$$i(t) = \begin{cases} I_0, & \text{para } t < 0 \\ \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-t/\tau}, & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

$\tau = R / L$



$$i(0) = I_0$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RL

- Al igual que en el circuito RC, la respuesta $i(t)$ tiene una parte transitoria y otra parte permanente

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-t/\tau} \quad (\text{respuesta completa})$$

$$i_t = \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-t/\tau} \quad (\text{respuesta transitoria})$$

$$i_{ss} = \frac{V_s}{R} \quad (\text{respuesta en estado estable})$$

- Nota: si el interruptor cambia en $t = t_0$ la respuesta completa es:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-(t-t_0)/\tau}$$

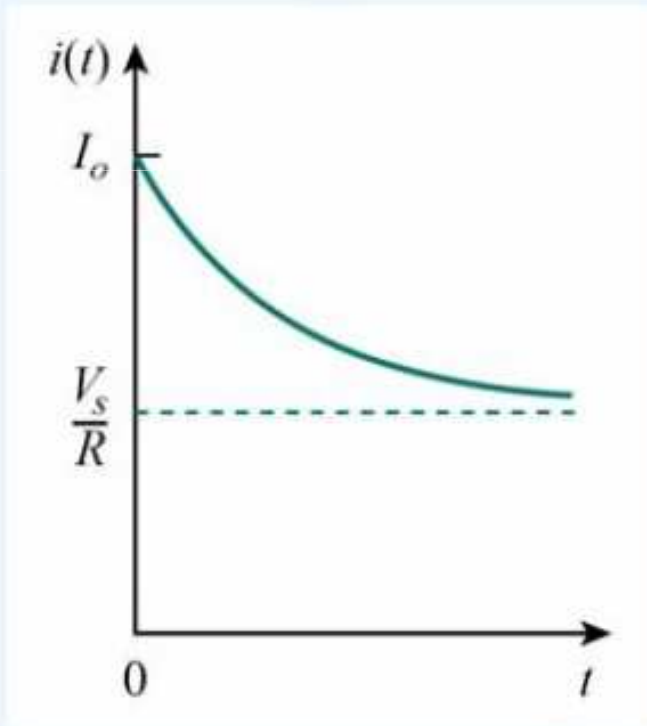
ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

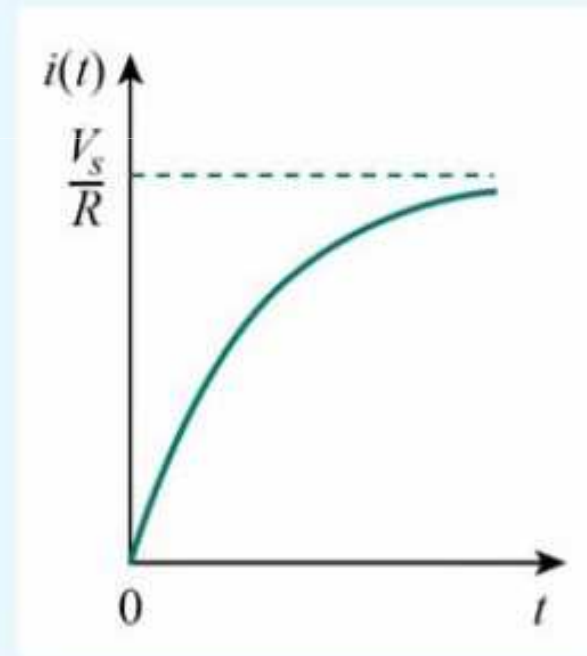
Circuitos RL

- Gráficamente

$$I_0 > \frac{V_s}{R}$$



$$I_0 = 0$$



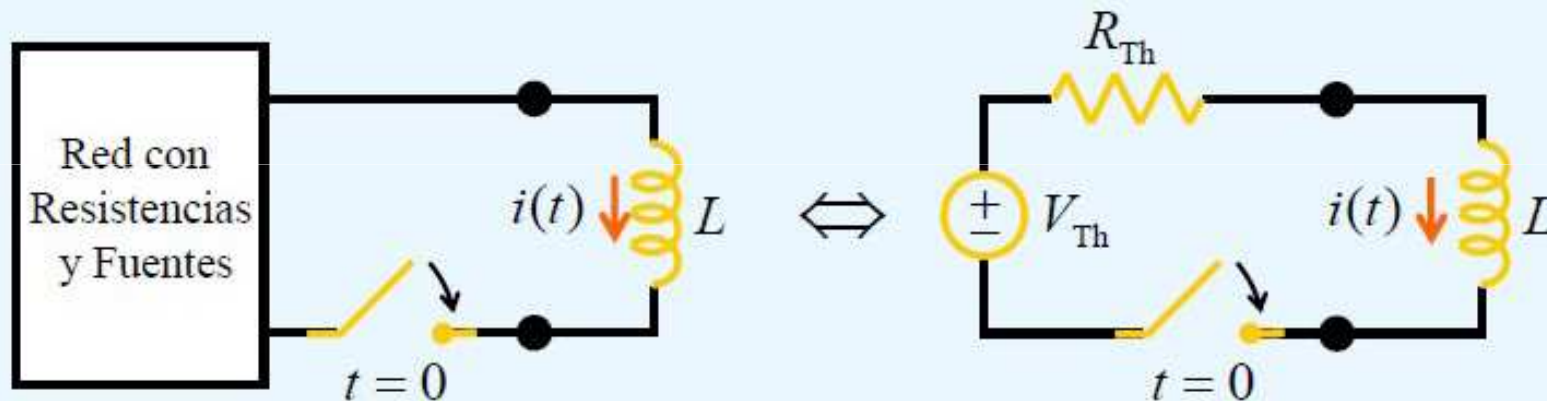
$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-t/\tau}$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Primer Orden

Circuitos RL

- Consideramos una bobina L con una corriente inicial $i(0) = I_0$
- Conectamos la bobina a una red con resistencias y fuentes de valor cte a través de un interruptor, como se muestra en la figura



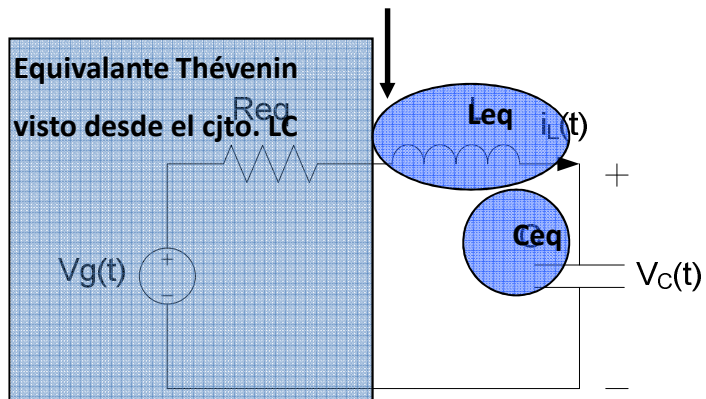
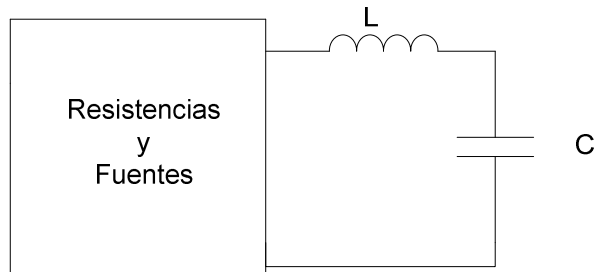
- Para obtener la corriente en la bobina $i(t)$ (para $t > 0$) basta calcular el equivalente Thevenin visto desde los terminales de la bobina y aplicar la solución conocida para el circuito RL:

$$i(t) = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} + \left(I_0 - \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \right) e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{R_{Th}}{L} \quad t \geq 0$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Segundo Orden. Circuitos básicos

- **RLC serie:** circuito compuesto por una resistencia, bobina y condensador en serie.

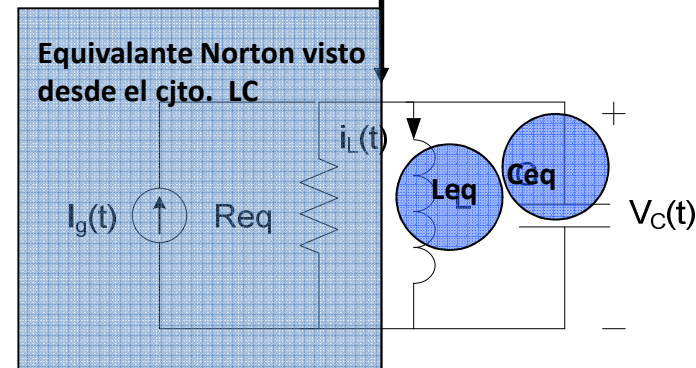


$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_C(t) = \frac{1}{LC} V_g(t)$$

$$v_C(0) = V_0 \quad i_L(0) = I_0 = C \left. \frac{dv_C(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

Condiciones iniciales

- **RLC paralelo:** circuito compuesto por una resistencia, bobina y condensador en paralelo.



$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_{eq} C} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_C(t) = \frac{1}{LC} i_g(t)$$

$$i_L(0) = I_0 \quad v_C(0) = V_0 = L \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

Condiciones iniciales

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Segundo Orden.

Respuesta en ausencia de fuentes

$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \quad \text{Polinomio característico}$$

$$S_1, S_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$X(t) = K_1 \cdot e^{S_1 t} + K_2 \cdot e^{S_2 t}$$

Respuesta natural

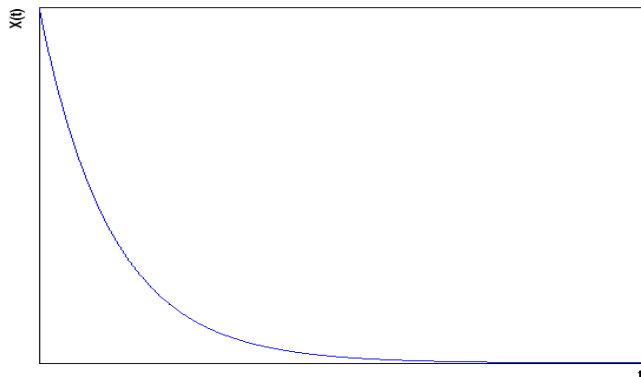
$$\text{constante de amortiguamiento} \equiv \alpha = \begin{cases} \frac{R_{eq}}{2L}, & \text{para RLC serie} \\ \frac{1}{2R_{eq}C}, & \text{para RLC paralelo} \end{cases}$$

$$\text{frecuencia de resonancia} \equiv \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ para RLC serie y paralelo}$$

Respuesta Sobre amortiguada $\alpha > \omega_0$

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

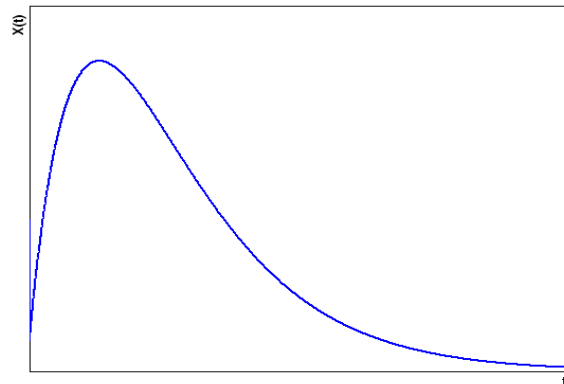
$$X(t) = K_1 \cdot e^{S_1 t} + K_2 \cdot e^{S_2 t}$$



Respuesta Críticamente amortiguada

$$S_1 = S_2 = -\alpha \quad \alpha = \omega_0$$

$$X(t) = (K_1 t + K_2) \cdot e^{-\alpha t}$$

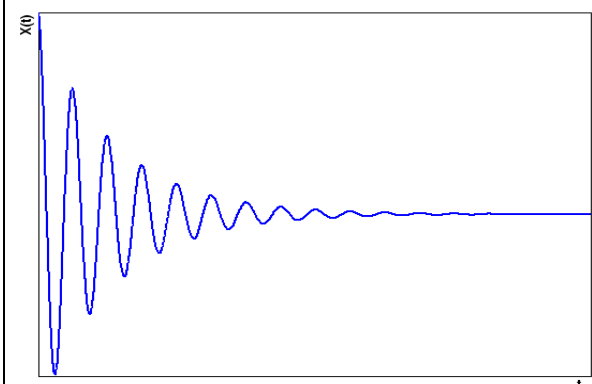


Respuesta Subamortiguada $\alpha < \omega_0$

$$S_1 = -\alpha + j\omega_d \quad S_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{frecuencia natural} \equiv \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$X(t) = K_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + K_2)$$



ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Segundo Orden. Respuesta en continua

Respuesta Sobreamortiguada

$$\alpha > \omega_0$$

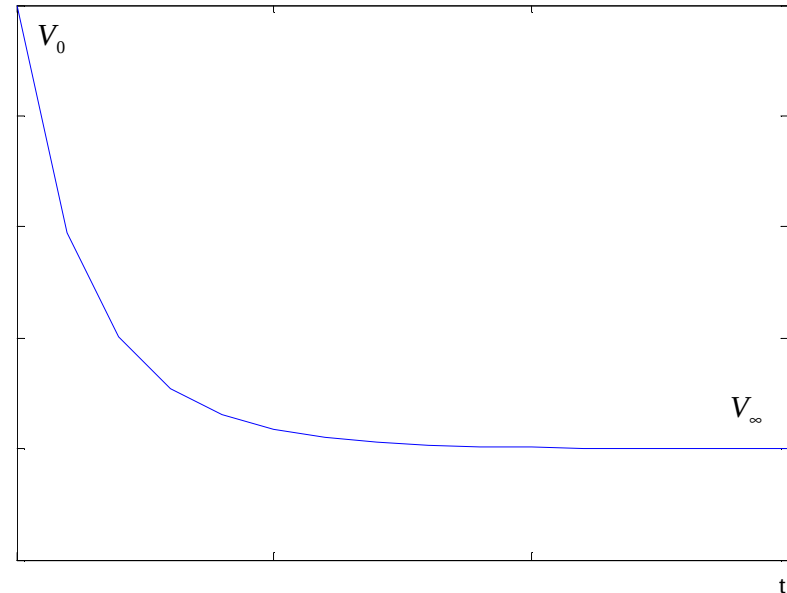
$$V_c(t) = V_\infty + K_1 \cdot e^{S_1 t} + K_2 \cdot e^{S_2 t}$$

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Determinación de K_1 y K_2 :

Condiciones iniciales: V_0 e I_0

Rég. permanente: V_∞



$$\frac{I_c(t)}{C} = \frac{dV_c(t)}{dt} = K_1 \cdot S_1 \cdot e^{S_1 t} + K_2 \cdot S_2 \cdot e^{S_2 t}$$

$$V_0 - V_\infty = K_1 + K_2$$

$$I_0 / C = K_1 \cdot S_1 + K_2 \cdot S_2$$



En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 - V_\infty \\ I_0 / C \end{bmatrix}$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Segundo Orden. Respuesta en continua

Respuesta Críticamente amortiguada $\alpha = \omega_0$

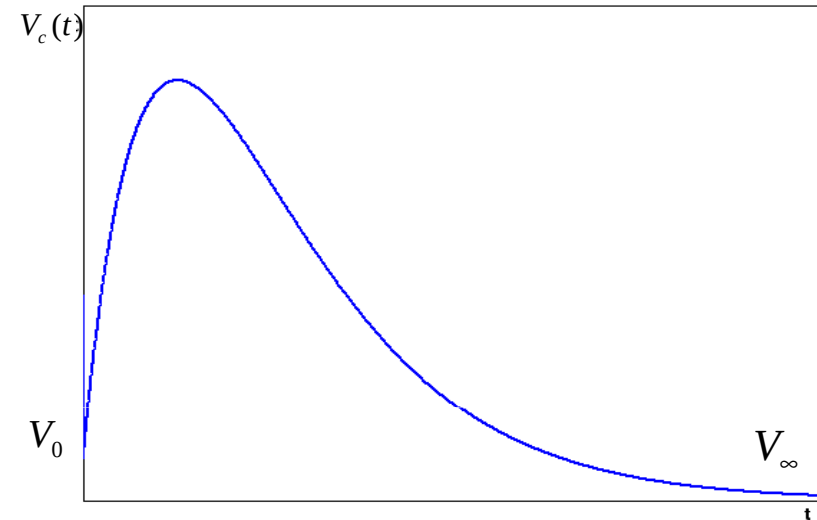
$$V_c(t) = V_\infty + (K_1 t + K_2) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$S_1 = S_2 = -\alpha$$

Determinación de K_1 y K_2 :

Condiciones iniciales: V_0 e I_0

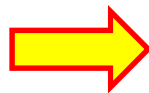
Rég. permanente: V_∞



$$\frac{I_c(t)}{C} = \frac{dV_c(t)}{dt} = K_1 \cdot e^{-\alpha t} - \alpha (K_1 t + K_2) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$V_0 - V_\infty = K_2$$

$$I_0 / C = K_1 - K_2 \alpha$$



En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 - V_\infty \\ I_0 / C \end{bmatrix}$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Segundo Orden. Respuesta en continua

Respuesta Subamortiguada $\alpha < \omega_0$

$$V_c(t) = V_\infty + K_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + K_2)$$

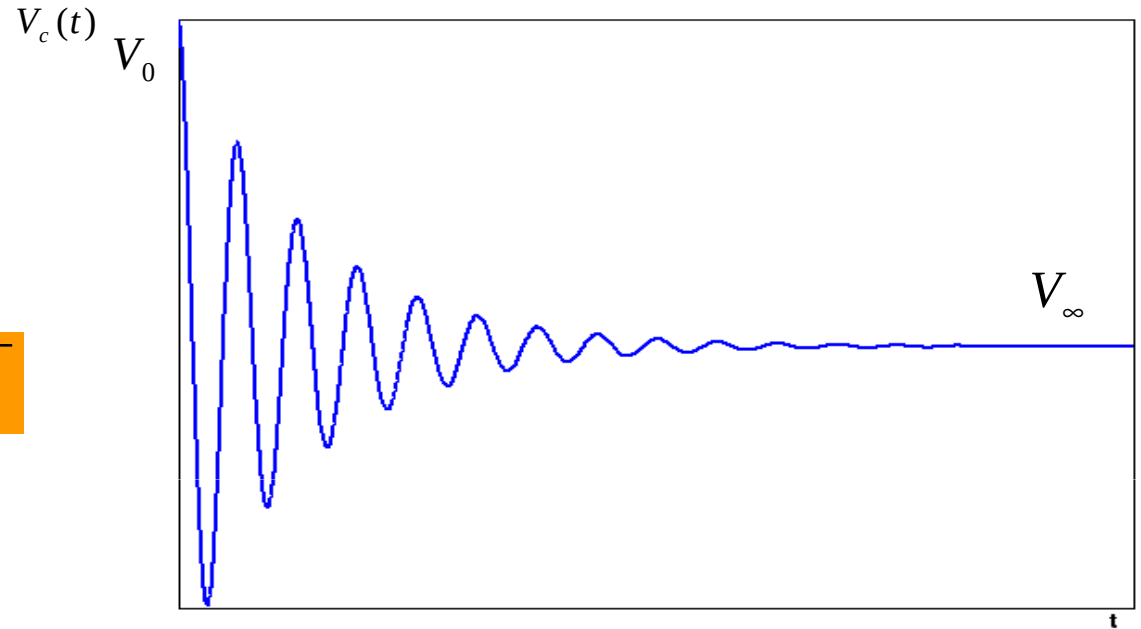
$$S_1 = -\alpha + j\omega_d \quad S_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\text{frecuencia natural} \equiv \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Determinación de K_1 y K_2 :

Condiciones iniciales: V_0 e I_0

Rég. permanente: V_∞



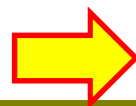
$$\frac{I_c(t)}{C} = \frac{dV_c(t)}{dt} = -K_1 \omega_d e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + K_2) - \alpha K_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + K_2)$$

$$V_0 - V_\infty = K_1 \cos K_2$$

$$I_0 / C = -K_1 \omega_d \sin K_2 - \alpha K_1 \cos K_2$$

$$X = K_1 \cos K_2$$

$$Y = K_1 \sin K_2$$



En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -\omega_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 - V_\infty \\ I_0 / C \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$K_2 = \arctg(Y / X)$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Segundo Orden. Respuesta en alterna

Respuesta Sobreamortiguada $\alpha > \omega_0$

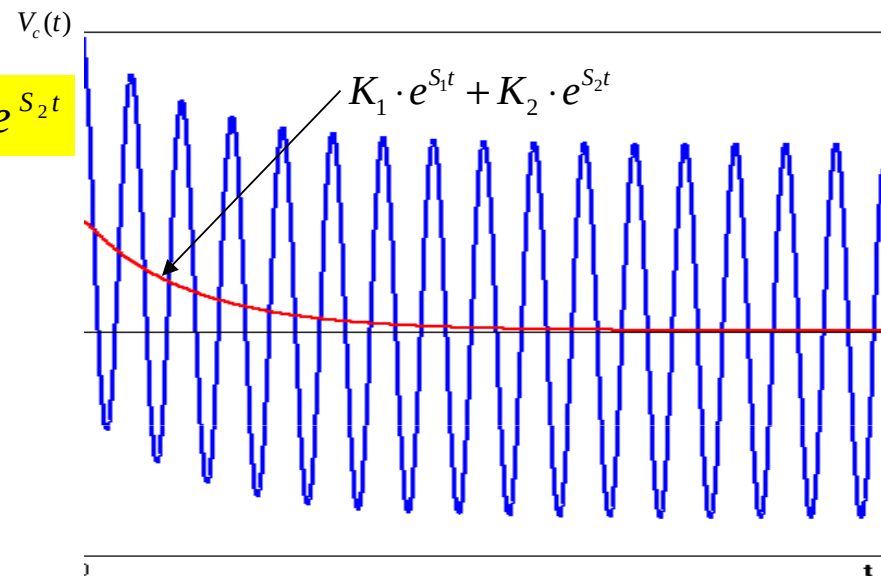
$$V_c(t) = \sqrt{2}V_\infty \cos(\omega t + \varphi) + K_1 \cdot e^{S_1 t} + K_2 \cdot e^{S_2 t}$$

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Determinación de K_1 y K_2 :

Condiciones iniciales: V_0 e I_0

Rég. permanente: $\sqrt{2}V_\infty \cos(\omega t + \varphi)$



$$\frac{I_c(t)}{C} = \frac{dV_c(t)}{dt} = -\sqrt{2}V_\infty \omega \sin(\omega t + \varphi) + K_1 \cdot S_1 \cdot e^{S_1 t} + K_2 \cdot S_2 \cdot e^{S_2 t}$$

$$V_0 - \sqrt{2}V_\infty \cos \varphi = K_1 + K_2$$



En forma matricial:

$$I_0 / C + \sqrt{2}V_\infty \omega \sin \varphi = K_1 S_1 + K_2 S_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 - \sqrt{2}V_\infty \cos \varphi \\ I_0 / C + \sqrt{2}V_\infty \omega \sin \varphi \end{bmatrix}$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Segundo Orden. Respuesta en alterna

Respuesta Críticamente amortiguada $\alpha = \omega_0$ $V_c(t)$

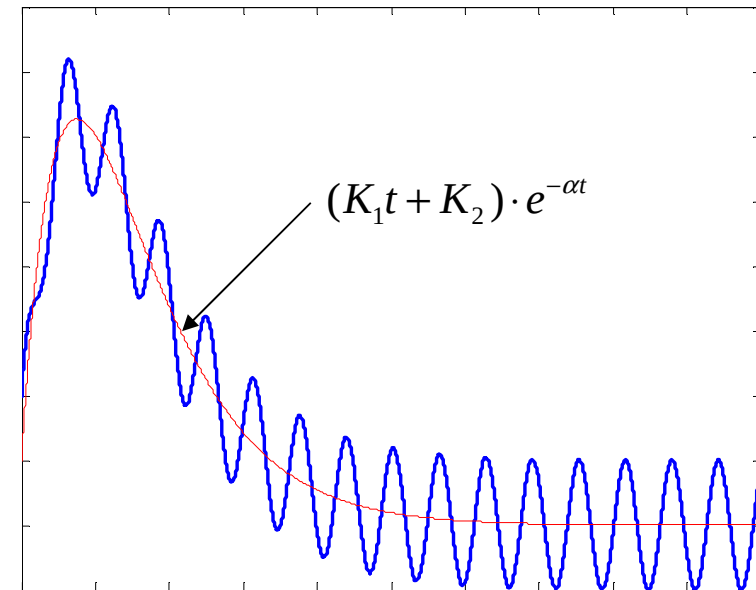
$$V_c(t) = \sqrt{2}V_\infty \cos(\omega t + \varphi) + (K_1 t + K_2) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$S_1 = S_2 = -\alpha$$

Determinación de K_1 y K_2 :

Condiciones iniciales: V_0 e I_0

Rég. permanente: $\sqrt{2}V_\infty \cos(\omega t + \varphi)$



$$I_c(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt} = -\sqrt{2}V_\infty \omega \sin(\omega t + \varphi) + K_1 \cdot e^{-\alpha t} - \alpha (K_1 t + K_2) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$V_0 - \sqrt{2}V_\infty \cos \varphi = K_2$$



En forma matricial:

$$I_0 / C + \sqrt{2}V_\infty \omega \sin \varphi = K_1 - K_2 \alpha$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 - \sqrt{2}V_\infty \cos \varphi \\ I_0 / C + \sqrt{2}V_\infty \omega \sin \varphi \end{bmatrix}$$

ANÁLISIS TRANSITORIO

Análisis Transitorio de Circuitos de Segundo Orden. Respuesta en alterna

Respuesta Subamortiguada

$$\alpha < \omega_0$$

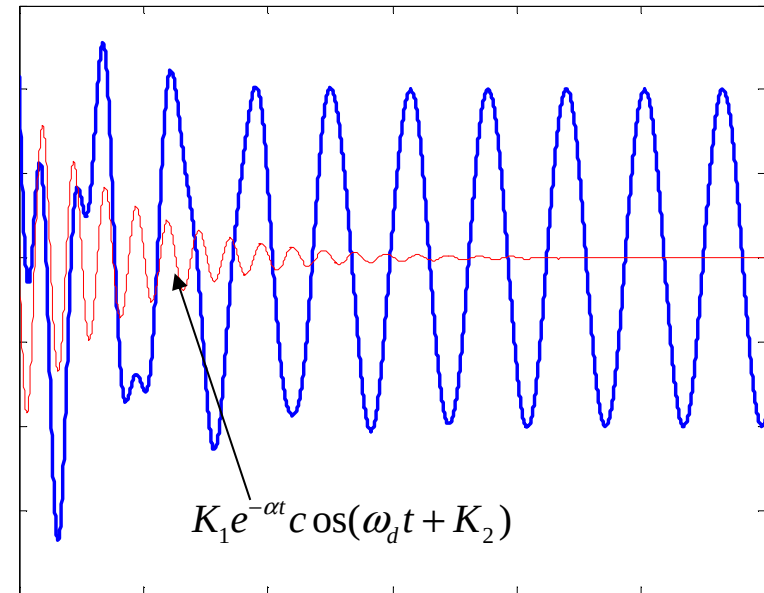
$$V_c(t) = \sqrt{2}V_\infty \cos(\omega t + \varphi) + K_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + K_2)$$

$$S_1 = -\alpha + j\omega_d \quad S_2 = -\alpha - j\omega_d \quad \text{frecuencia natural} \equiv \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Determinación de K_1 y K_2 :

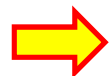
Condiciones iniciales: V_0 e I_0

Rég. permanente: $\sqrt{2}V_\infty \cos(\omega t + \varphi)$



$$I_c(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt} = -\sqrt{2}V_\infty \omega \sin(\omega t + \varphi) - K_1 \omega_d e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + K_2) - \alpha K_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + K_2)$$

$$V_0 - \sqrt{2}V_\infty \cos \varphi = K_1 \cos K_2$$



En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -\omega_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 - \sqrt{2}V_\infty \cos \varphi \\ I_0 / C + \sqrt{2}V_\infty \omega \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$I_0 / C + \sqrt{2}V_\infty \omega \sin \varphi = -K_1 \omega_d \sin K_2 - \alpha K_1 \cos K_2$$

$$K_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$X = K_1 \cos K_2$$

$$Y = K_1 \sin K_2$$

$$K_2 = \arctg(Y / X)$$